I. Division euclidienne :

Définition 1

Soient a et b deux nombres positifs avec également $b \neq 0$.
Effectuer la division euclidienne du nombre a par le nombre b revient à déterminer deux autres nombres r et q tels que : $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < q$

Illustration et exemple :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} \vdots & q \\ r & \end{array} \qquad \begin{array}{l} a : Dividende \\ b : Diviseur \\ q : Quotient \\ r : Reste \end{array}$$

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

$$\begin{array}{r|c} 149 & 7 \\ \cline{2-2} -\underline{14}\,: & 21 \\ 09 & \\ -\underline{7} & \\ 2 & \end{array}$$

$$149 = 21 \times 7 + 2$$

II. Divisilité :

1. Diviseurs et multiples :

Définition 2 (*Diviseurs et multiples*)

Soient a et b deux nombres non nuls.
*1) b est un **diviseur** de a lorsque lorsque le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.*
*2) a est un **multiple** de b lorsque b est un diviseur de a.*

Exemples :
- 7 divise 21 mais 21 ne divise pas 7.
- 13 est un diviseur de 26 et 26 est un multiple de 13.
- a est un multiple de b signifie que a est dans la table de b.
- 149 n'est pas divisible par 7 car le reste de la division euclidienne de 149 par 7 vaut $2 \neq 0$

Remarques :
- Lorsque b est un diviseur de a on dit également que b divise a ou encore que a est divisible par b.
- 0 ne divise aucun nombre.
- a est un multiple de b signifie que a est dans la table de b.
- 0 est divisible par tous les nombres car 0 est multiple de tous les nombres.

2. Critères de divisibilité :

Définition 3

Un critère de divisibilité est une règle permettant de savoir si un nombre est divisible ou pas par un autre nombre.

Proposition 1 (*Critère pour 2 ; 5 et 10*)

1) Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est : 0 ;2 ;4 ;6 ou 8.
2) Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est : 0 ou 5.
3) Un nombre est divisible par 10 si et seulement si son chiffre des unités est : 0.

Exemples :
- 156 est divisible par 2.
- 140 est divisible par 2 ; par 5 et par 10.
- 147 n'est divisible ni par 2 ; ni par 5 ; ni par 10.

Proposition 2 (*Critère pour 3 et 9*)

1) Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est dans la table de 3.
2) Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est dans la table de 9.

Exemples :
- 156 est divisible par 2.
- 111 est divisible par 3 mais pas par 9 car $1 + 1 + 1 = 3$
- 144 990 est divisible par 3 et par 9 car $1 + 4 + 4 + 9 + 9 = 27$
- 923 n'est divisible ni par 3 ; ni par 9 car $9 + 2 + 3 = 14$

Remarque : *Tous les nombres divisibles par 9 sont divisibles par 3 mais tous les nombres divisibles par 3 ne sont pas forcément divisibles par 9 car tous les nombres de la table de 9 sont dans la table de 3 mais tous les nombres de la table de 3 ne sont pas dans la table de 9. Cette remarque s'étend également à d'autres nombres comme 4 et 2 etc.*

III. Nombres premiers :

Définition 4

*Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs distincts.*

Exemples :
- 6 n'est pas un nombre premier car ses diviseurs sont : 1 ;2 ;3 ;6
- 7 est un nombre premier car divisible par : 1 et 7
- 1 n'est pas un nombre premier.
- 0 n'est pas un nombre premier car 0 est divisible par n'importe quel nombre entier non nul.

Liste des nombres premiers inférieurs à 30 :
2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29

IV. Applications :

1. Décomposition en produits de facteurs premiers :

Théorème 1 (*Théorème fondamental de l'arithmétique*)

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Exemple 1 : Décomposer 60 en produit de facteurs premiers :

$60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = \boxed{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \boxed{2^2 \times 3 \times 5}$

Exemple 2 : Décomposer 920 en produit de facteurs premiers :

$920 = 92 \times 10 = 46 \times 2 \times 2 \times 5 = 23 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = \boxed{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 23} = \boxed{2^3 \times 5 \times 23}$

2. Fractions irréductibles :

Définition 5

Soient a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$. La fraction $\frac{a}{b}$ est dite irréductible lorsque a et b n'ont que le nombre 1 comme diviseur commun.

Exemple : Réduire la fraction $\frac{600}{450}$.
D'une part $600 = 6 \times 100 = 2 \times 3 \times 10 \times 10 = 2^3 \times 3 \times 5^2$.
D'autre part $450 = 45 \times 10 = 9 \times 5 \times 5 \times 2 = 2 \times 3^2 \times 5^2$.
Ainsi : $\frac{600}{450} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{5} \times \cancel{5}} = \frac{4}{3}$.

Remarque : *Cette application à la réduction des fractions est importante à connaître, elle est régulièrement appliquée dès que l'on calcul avec des fractions.*