I. Quotients de nombres relatifs :

1. Définition :

Définition 1

Soient a et b deux nombres relatifs tels que $b \neq 0$.

La fraction $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a.

Autrement dit : $\frac{a}{b} \times b = a$.

Exemples : $\frac{5}{7} \times 7 = 5$

2. Quotients égaux :

Proposition 1

Un quotient de deux nombres relatifs ne change pas lorsqu'on multiplie ou divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

Autrement dit, pour tout nombre k non nul on a : $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$ et $\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$

Exemple : $\frac{25}{30} = \frac{5 \times \cancel{5}}{6 \times 5} = \frac{5}{6}$

II. Addition et soustraction de fractions :

1. Cas où les dénominateurs sont les mêmes :

Proposition 2

Pour additionner ou soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, on additionne (ou soustrait) les numérateurs et on garde le même dénominateur.

Autrement dit, pour tous nombres relatifs $a; b; c$ avec $c \neq 0$ on a : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemple : $\frac{-10}{7} + \frac{4}{7} = \frac{-10+4}{7} = \frac{-6}{7}$

2. Cas où les dénominateurs sont différents :

Proposition 3

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions ayant des dénominateurs différents, on doit d'abord les réduire au même dénominateur.

Exemple : $\frac{-7}{5} + \frac{4}{3} = \frac{-7 \times 3}{5 \times 3} + \frac{4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-21}{15} - \frac{20}{15} = \frac{-21-20}{15} = \frac{-41}{15}$

III. Multiplication de fractions :

Proposition 4

Pour multiplier deux fractions on multiplie les numérateurs entre eux et on multiplie les dénominateurs entre eux.

Autrement dit, pour tous nombres $a; b; c; d$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ on a : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Exemples : $\frac{5}{6} \times \frac{-11}{7} = \frac{5 \times (-11)}{6 \times 7} = \frac{-55}{42} = -\frac{55}{42}$

Important : Il est parfois possible de faire des simplifications avant de multiplier :
$\frac{15}{4} \times \frac{-8}{21} = \frac{15 \times (-8)}{4 \times 21} = -\frac{\cancel{3} \times 5 \times \cancel{4} \times 2}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 7} = -\frac{10}{7}$

IV. Division :

1. Inverse d'un nombre relatif non nul :

Définition 2

Deux nombres sont inverse l'un de l'autre lorsque leur produit vaut 1.

Exemples : 5 et 0.2 sont des nombres inverses car $5 \times 0.2 = 1$

-10 et 0.1 ne sont pas deux nombres inverses car $-10 \times 0.1 = -1 \neq 1$

Remarque : 0 n'admet pas d'inverse car le produit d'un nombre par 0 ne peut pas être égal à 1 (car il vaut 0).

Proposition 5

Pour tout nombre x tel que $x \neq 0$.

L'inverse de x est le nombre $\frac{1}{x}$

Démonstration : Pour tout nombre x tel que $x \neq 0$ on a : $x \times \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$ ■

Exemples : L'inverse du nombre -7 est le nombre $-\frac{1}{7}$ car $-7 \times \frac{1}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$

Proposition 6

Soient a et b deux nombres relatifs non nuls.

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

Démonstration :

Pour tous nombres a et b non nuls on a : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{b}}{\cancel{b} \times \cancel{a}} = 1$ ■

Exemples : L'inverse de $\frac{4}{5}$ est $\frac{5}{4}$ car $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{\cancel{4} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{4}} = 1$

2. Quotients de nombres en écriture fractionnaire :

Proposition 7

Diviser un nombre non nul revient à le multiplier par son inverse.

Autrement dit, pour tous nombres a et b non nuls on a : $a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

Exemples :

$7 \div 0.1 = 7 \times \frac{1}{0.1} = 7 \times 10 = 70$

$\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{6}{7}} = -\frac{5}{3} \div \frac{6}{7} = -\frac{5}{3} \times \frac{7}{6} = -\frac{35}{18}$

$\frac{-\frac{5}{4}}{-3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$